Série 1 : Les intégrales de Riemann

Exercice 1

Montrer que la fct $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$

Corrigé

on a f est R-intégrable si $I^+(f) = I^-(f)$

$I^+(f) = \inf \{ \int \varphi(x)dx \mid \varphi \geq f \}$

$I^-(f) = \sup \{ \int \varphi(x)dx \mid \varphi \leq f \}$

on prend une subdivision $\sigma = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots \frac{n-1}{n}\}$

soit φ une fct en escalier

- si $\varphi \leq f \Rightarrow \varphi \leq 0$
- si $\varphi \geq f \Rightarrow \varphi \geq 1$

on a $I^+(f) = \inf \{ \int_0^1 \varphi(x)dx / \varphi \geq f \} = 1$

et $I^-(f) = \sup \{ \int_0^1 \varphi(x)dx / \varphi \leq f \} = 0$

d'où $I^+(f) = I^-(f)$

donc f n'est pas R-intégrable sur $[0,1]$.

Exercice 2

soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$

1 - Est ce que f est R-intégrable ?

2 - Que vaut $\int_0^1 f(x)\,dx$

Corrigé

soit σ la subdivision régulière de $[0,1]$

$\sigma = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots \frac{i}{n}, \frac{n}{n} = 1 \right\}$

soit $x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$.

donc $\left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \leq x^2 \leq \left(\frac{i}{n}\right)^2$

soit ϕ^- la fct en escalier définie par

$\phi^-(x) = \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \quad ; x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$

soit ϕ^+ la fct en escalier définie par

$\phi^+(x) = \left(\frac{i}{n}\right)^2 \quad ; x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$

$$\cdot \int_0^1 \phi^-(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \frac{(i-1)^2}{n^2}\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n} (i-1)^2$$

$$X = \frac{1}{n^3}\left(-n^2 + \sum_{i=0}^{n} i^2\right) \quad X$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(-n^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

$$\cdot \int_0^1 \phi^+(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

on sait que :

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \leq I^*(f) \leq \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

et on a $\lim_{+\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$

et $\lim_{+\infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$

d'après le théorème de gendarme

$I^-(f) = I^+(f) = \frac{1}{3}$.

d'où f est R intégrable et $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$

Exercice 3

Calculer la limite des suites suivantes

1 - $U_n = \frac{1}{n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\frac{2\pi}{n} + \dots + \sin\frac{n\pi}{n}\right)$

$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

alors $\lim U_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$

$= \frac{1}{\pi}\left[-\cos(x)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$

2 - $U_n = n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2}\right)$

$= n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$

$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$

on prend $a = 1$ et $b = 2$ et $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

donc $\lim_{+\infty} U_n = \frac{1}{2-1}\int_1^2 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$

$= \left[\frac{-1}{1+x}\right]_1^2 = \frac{1}{2}$

3 - $U_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}}$

on pose $f(x)^2 = \sqrt{x}$ donc $f\left(\frac{k}{n}\right) = \sqrt{\frac{k}{n}}$

et $a = 0$ et $b = 1$ donc $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

alors $\lim U_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 =$

4- $U_n = \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(k+n)^{1/n}$

$= \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n} e^{\ln((k+n)^{1/n})}$

$= \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n}\ln(k+n)} = \frac{1}{n} e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln(k+n)}$

$= \frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}(\ln(1+n)+\cdots+\ln(n+n))}$

$= \frac{1}{n}\exp\left[\frac{1}{n}\left(\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)n\right)+\cdots+\left(\ln\left(\frac{n}{n}+1\right)n\right)\right]$

$= \frac{1}{n}\exp\left[\frac{1}{n}\left(\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+\ln(n)+\cdots+\ln\left(\frac{n}{n}+1\right)+\ln(n)\right)\right]$

$= \frac{1}{n}\exp\left[\frac{1}{n}\left(\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)+\cdots+\ln\left(\frac{n}{n}+1\right)+n\ln(n)\right)\right]$

$= \frac{1}{n}\exp\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}+1\right)\right]\exp\left[\frac{1}{n}n\ln(n)\right]$

$= \frac{n}{n}\exp\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}+1\right)\right]$

alors $\lim(v_n) = 2\ln(2) - 1$

d'où $\lim(U_n) = \exp(2\ln(2)-1) = \frac{e^{\ln 4}}{e} = \frac{4}{e}$

5- $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}}$

$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$

soit $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et $a=0$ et $b=1$

$U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$\lim U_n = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}dx$

$= \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1$

Exercice 4

a) $\int \ln t\,dt$

on prend $\begin{cases} u'(t)=1 \\ v(t)=\ln(t) \end{cases}$ $\begin{cases} u(t)=t \\ v'(t)=\frac{1}{t} \end{cases}$

donc $\int \ln t\,dt = [t\ln(t)] - \int 1\,dt$

$= [t\ln(t) - t]$

$= t(\ln t - 1) + ct$

b) $\int_1^2 t\ln t\,dt$

on prend $\begin{cases} u'(t)=t \\ v(t)=\ln t \end{cases}$ $\begin{cases} u(t)=\frac{1}{2}t^2 \\ v'(t)=\frac{1}{t} \end{cases}$

donc $\int_1^2 t\ln t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\ln(t)\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 t\,dt = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4}$

$= 2\ln(2) - \frac{3}{4}$

c) $\int_0^1 te^t\,dt$

$\begin{cases} u(t)=t \\ v'(t)=e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t)=1 \\ v(t)=e^t \end{cases}$

donc $\int_1^2 t\ln t\,dt = [te^t]_0^1 - \int e^t\,dt$

$= [te^t - e^t]_0^1 = e - e + 1 = 1$

g) $\int_0^1 t(\arctan(t))^2 dt$

$\begin{cases} u(t)=(\arctan(t))^2 \\ v'(t)=t \end{cases} \Rightarrow v(t)=\frac{1}{2}t^2$

pour simplifier les calculs on prend $v(t)=\frac{t^2+1}{2}$

$\int_0^1 t(\arctan(t))^2 dt = \left[\left(\frac{t^2+1}{2}\right)(\arctan t)^2\right]_0^1$

$- \int_0^1 \frac{t^2+1}{2}\times 2\frac{\arctan t}{t^2+1}dt$

$= \left[\frac{(t^2+1)}{2}(\arctan t)^2\right]_0^1 - \int_0^1 \arctan(t)\,dt$

$= \frac{\pi^2}{16} - \int_0^1 \arctan t\,dt = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$

d) $\int_0^1 \arctan(t)\,dt$

$\begin{cases} u(t)=\arctan t \\ v'(t)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t)=\frac{1}{1+t^2} \\ v(t)=t \end{cases}$

donc $\int_0^1 \arctan(t)\,dt = [t\arctan(t)]_0^1 - \int\frac{t}{1+t^2}dt$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$

f) $\int_1^e t^2(\ln t)\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\ln t\right]_1^e - \int_1^e \frac{t^2}{3}dt$

$= \left[\frac{t^3}{3}\ln t\right]_1^e - \left[\frac{t^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{e^3}{9} - \frac{1}{9}\right]$

h) $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$ on pose $x=\sqrt{t}$

$\Rightarrow t = x^2$

$\Rightarrow dt = 2x\,dx$

$\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt = \int_1^2 \frac{1-x}{x}2x\,dx$

$= \int_1^2 2(1-x)dx = \left[2\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right]_1^2$

$= 2(2-2) - 2\left(1-\frac{1}{2}\right) = -1$

2) $\int_1^e \frac{(\ln(t))^n}{t}\,dt = \int_1^e (\ln(t))'(\ln(t))^n\,dt$

$= \left[\frac{1}{n+1}(\ln t)^{n+1}\right]_1^e = \frac{1}{n+1}[1-0] = \frac{1}{n+1}$

Exercice 5

Calculer :

1) $\int \frac{-1+2x}{(1+x)^2}\,dx$

soit $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2} = \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x+1)^2}$

$\lim_{x\to -1}(x+1)^2 f(x) \Rightarrow b = -3$

pour $x=0$ $\quad f(0) = -1 = a-3 \Rightarrow a = 2$

donc $f(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}$

$\int f(x) = \int\left(\frac{2}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}\right)dx$

$= 2\ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + c, \; c\in\mathbb{R}$

2) $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$

soit $f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$

on a $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$

donc $\int f(x) = \int\left(\frac{-1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1|$

Exercice 6

1- Démontrer qu'il existe 2 réels a et b tq $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$

Le choix de $a=1$ et $b=-1$

2- En déduire la valeur de $\int_1^2 \frac{x}{x+1}\,dx$

$\int_1^2 \frac{x}{x+1}\,dx = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= \left[x - \ln(x+1)\right]_1^2 = -1 - \ln(3) + 2 + \ln(2)$

$= 1 + \ln(2/3)$

Exercice 7

soit $f(x) = \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$

1- Démontrer qu'il existe 3 réels a, b et c tels que : $\forall x\in]1,+\infty[\; f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}$

$\Rightarrow \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{a(x+3)^2 + b(x-1)(x+3) + c(x-1)}{(x-1)(x+3)^2}$

$\Rightarrow \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{x^2(a+b) + x(6a+2b+c) + 9a-3b-c}{(x-1)(x+3)^2}$

donc $\begin{cases} a+b = 5 \\ 6a+2b+c = 21 \\ 9a-3b-c = 22 \end{cases}$

donc $\begin{cases} a = 5-b \\ -4b+c = -9 \\ -12b-c = -23 \end{cases}$

donc $\begin{cases} a = 5-b \\ c = -9+4b \\ -16b = -32 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$

donc $f(x) = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+3} - \frac{1}{(x+3)^2}$

2- En déduire la primitive de f sur $]1,+\infty[$ qui s'annule en 2.

on a $F(x) = \int f(x) = \int \frac{3}{x-1}\,dx + \int \frac{2}{x+3}\,dx - \int \frac{1}{(x+3)^2}\,dx$

$= 3\ln|x-1| + 2\ln|x+3| + \frac{1}{x+3} + cte$

$F(x)$ s'annule en 2 donc $F(2) = 0$

$\Rightarrow 3\ln(1) + 2\ln(5) + \frac{1}{5} = 0$

$\Rightarrow 2\ln(5) + \frac{1}{5} + cte = 0$

$\Rightarrow cte = -2\ln(5) - \frac{1}{5}$

donc $F(x) = 3\ln(x-1) + 2\ln(x+3) - 2\ln(5) - \frac{1}{5}$

Exercice 8

1) $A = \int \cos(x)\sin^2(x)\,dx$

$= \int \sin'(x)(\sin(x))^2\,dx$

$= \frac{1}{3}(\sin x)^3 + cte, \quad cte\in\mathbb{R}$

2) $\int \cos^4(x)\sin^3(x)dx = \int \sin x(1-\cos^2(x))\cos^4 x\,dx$ on pose $U=\cos x$

$\frac{dU}{dx} = -\sin x$

donc $-dU = \sin x\,dx$

donc $I = \int -(1-U^2)U^4 dU = \int (U^6 - U^4)dU$

$= \frac{U^7}{7} - \frac{U^5}{5} + c = \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c$

3) $J = \int \cos^2(x)\sin^2(x)dx$

$= \int \cos^2(x)(1-\cos^2 x)dx = \int (\cos^2 x - \cos^4 x)dx$

en linéaire $\cos^2 x$ et $\cos^4 x$

$\cos^2(x) = \frac{(e^{ix}+e^{-ix})^2}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2}+1\right)$

$= \frac{1}{2}(\cos(2x)+1)$

$\cos^4(x) = \frac{(e^{ix}+e^{-ix})^4}{16} = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$

$J = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{3}{8}\right)dx$

$= \frac{1}{8}\left[x - \frac{\sin(4x)}{4}\right] + c, c\in\mathbb{R}$

Exercice 9

Soit $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1- Donner une expression implicite de I_n $\forall n\in\mathbb{N}$.

ona $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\sin^{n-1}(x)\,dx$

on a $U' = \sin(x)$ $\quad U = -\cos x$

$V = \sin^{n-1}(x)$ $\quad V' = (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x)$

$I_n = [-\cos x \sin^{n-1}x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x)dx$

$= (n-1)\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x\,dx$

$= (n-1)\left[\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx - \int_0^{\pi/2}\sin^n(x)dx\right]$

$= (n-1)(I_{n-2} - I_n)$

$nI_n = (n-1)I_{n-2}$

donc $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$

2) Calculer I_0, I_1, I_2

ona $I_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$

$I_1 = \int_0^{\pi/2}\sin(x)dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$

$I_2 = \int_0^{\pi/2}\sin^2(x)dx = \int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos(2x)}{2}dx$

$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$

3) Mq le produit $(n+1)I_nI_{n+1}$ est cte

ona $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$

$I_{n+1} = \frac{n}{n+1}I_{n-1}$

$I_nI_{n+1} = \frac{n-1}{n+1}I_{n-2}I_{n-1}$

donc $(n+1)I_nI_{n+1} = (n-1)I_{n-2}I_{n-1}$

$(2n+1)I_{2n}I_{2n+1} = (2n-1)I_{2n-2}I_{2n-1} = \ldots = I_0I_1 = \frac{\pi}{2}$

$2nI_{2n-1}I_{2n} = (2n-2)I_{2n-3}I_{2n-2}$

$= 2I_1I_2 = \frac{\pi}{2}$

donc $(n+1)I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

4) Calculer $\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n}{I_{n+1}}$ et $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}I_n$

ona $I_{n-1} < I_n < I_{n+1}$

donc $\frac{I_{n+1}}{I_{n+1}} < \frac{I_n}{I_{n+1}} < \frac{I_{n-1}}{I_{n+1}}$

ona $I_{n+1} = \frac{n}{n+1}I_{n-1}$

$I_{n-1} = \frac{n+1}{n}I_{n+1}$

Donc $1 \leqslant \frac{I_n}{I_{n+1}} \leqslant \frac{n+1}{n}$

d'où $\lim\frac{I_n}{I_{n+1}} = \lim\frac{n+1}{n} = 1$

et ona $(n+1)I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow (n+1)I_{n+1}^2 = \frac{\pi}{2}\frac{I_{n+1}}{I_n}$

ona $\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n} = \lim_{+\infty}\frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$

puisque ona $nI_n^2 \underset{\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$

donc $\sqrt{n}I_n \underset{\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fct dérivable et strictement croissante telle que $f(0) = 0$

1 - $\forall x > 0$, Mq $\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt = x f(x)$

Considérons l'application :

$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt - x f(x)$

elle est dérivable et $\forall x \geq 0$

$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt - x f(x)\right)$

$g'(x) = f(x) + f'(x) f^{-1}(f(x)) - (f(x) + x f'(x))$

$= f(x) + f'(x)\, x - f(x) - x f'(x)$

$= 0$

donc g est constante et comme $g(0) = 0$

$\Rightarrow g = 0$

d'où $\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt = x f(x)$

2 - En déduire que $\forall a, b > 0$ $\int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(t)\,dt \geq ab$ et que l'égalité se produit ssi $f(a) = b$

enfixe $b > 0$, on considère l'application

$\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$a \longmapsto \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(t)\,dt - ab$

φ est dérivable et $\varphi'(a) = f(a) - b$ $\forall a \in \mathbb{R}^+$

comme φ est croissante ona:

$\forall a < f^{-1}(b)$: $\varphi'(a) < 0$ et $\forall a > f^{-1}(b)$ $\varphi'(a) > 0$

$\varphi(f^{-1}(b)) = \int_0^{f^{-1}(b)} f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(t)\,dt - f^{-1}(b)\, b$

$= 0$

d'où $\int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(t)\,dt - ab \geq 0$

$\Rightarrow \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(t)\,dt \geq ab$

si $f(a) = b \Rightarrow \varphi'(a) = 0$

$\Rightarrow \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(t)\,dt = ab$

Exercice 10

1 - Calculer $\int x^k \ln(x)\,dx$

$= \frac{x^{k+1}}{k+1} \ln(x) - \int \frac{x^{k+1}}{k+1} \frac{1}{x}\,dx$

$= \frac{x^{k+1}}{k+1} \ln(x) - \frac{x^{k+1}}{k+1} \int x^k\,dx$

$= \frac{x^{k+1}}{k+1}\left(\ln(x) - \frac{1}{k+1}\right)$

2 - En déduire $\int \ln(x)\,dx$

Pour $k = 0$ on déduit que

$\int x^0 \ln x\,dx = \int \ln x\,dx = x(\ln x - 1)$

Exercice 11

soit a un nbr réel tq $0 < a < 1$, $\forall n \geq 1$

posons $U_n = \int_0^a t^n \sin(nt)\,dt$. Quelle est la limite de la suite $(n^2 U_n)$?

$\forall n \geq 1$ ona $U_n = \left|\int_0^a t^n \sin(nt)\,dt\right|$

$\leq \int_0^a \left|t^n \sin(nt)\right| dt$ ①

$\forall t \in [0, a]$

ona $\left|t^n \sin(nt)\right| = t^n \left|\sin(nt)\right| \leq t^n \leq a^n$

car $\left|\sin(nt)\right| \leq a$, d'après les propriétés de l'intégrale on en déduit l'inégalité:

$\int_0^a t^n \sin(nt)\,dt \leq \int_0^a a^n\,dt = a a^n = a^{n+1}$ ②

les inegalités ① et ② impliquent que $\forall n \geq 1$

ona $|n^2 U_n| \leq n^2 a^{n+1}$ ③

Puisque $0 < a < 1$, $n^2 a^{n+1}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, d'après l'inégalité ③, la suite $(n^2 U_n)$ a donc pour limite 0.

Exercice 12

soit f la fct définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1\,dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$

1 - Quel est le domaine de définition de f ? Est-elle paire, impaire ?

. ona $\forall t \in \mathbb{R}\ t^4+t^2+1 > 0$ donc $D_f = \mathbb{R}$

et ona $\forall x \in \mathbb{R}\ f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\,dt$

$= -\int_{x}^{2x} \frac{du}{\sqrt{u^4+u^2+1}}$ on pose $u = -t \Rightarrow du = -dt$

$t = -x \Rightarrow u = x$

$t = -2x \Rightarrow u = 2x$

$= -f(x)$

donc $\forall x \in \mathbb{R}\ f(-x) = -f(x)$

donc f est impaire.

2- Etudier les variations de f, puis l'existence de limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Posons $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ alors par le théorème fondamental du calcul intégral F est dérivable sur R avec

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

or $f(x) = F(2x) - f(x)$

et on en déduit que f est dérivable sur R

avec $f'(x) = 2F'(2x) - F'(x)$

$$= \frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x^4+x^2+1} - \sqrt{16x^4+4x^2+1}}{\left(\sqrt{16x^4+4x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^4+x^2+1}\right)}$$

$$= \frac{-12x^4+3}{\left(\sqrt{16x^4+4x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^4+x^2+1}\right)\left(2\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{16x^4+4x^2+1}\right)}$$

$f'(x)$ est de signe $-12x^4+3$

ona $-12x^4+3 = 0 \Rightarrow x = \pm\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

donc f est croissante sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$.

Les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ sont positive et décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$ donc les limites existent :

$\forall x > 0$ ona $0 \leqslant \int_x^{2x} \frac{1\,dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \leqslant \frac{2x-x}{\sqrt{x^4+x^2+1}} \to 0$ $(+\infty)$

d'où $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Par imparité de f $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Exercice 13

Soit f une fct de classe C^2 sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, on pose $I = \int_a^b f(t)\,dt$ et on note $M_2 = \max\{|f''(x)| ; x \in [a,b]\}$

1- Mq $I = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)\,dt$

ona $\int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)\,dt$

$= \frac{1}{2}\left[(t-a)(t-b)f'(t)\right]_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b f'(t)\left[(t-b)+(t-a)\right]dt$

$= -\frac{1}{2}\left(\int_a^b f'(t)(t-b)\,dt + \int_a^b (t-a)f'(t)\,dt\right)$

$= -\frac{1}{2}\left[(b-b)f(b)\right]_a^b + \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\,dt - \frac{1}{2}\left[(t-a)f(t)\right]_a^b + \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\,dt$

$= \frac{1}{2}(a-b)f(a) + \int_a^b f(t)\,dt - \frac{1}{2}(b-a)f(b)$

$= -\frac{1}{2}(b-a)\left(f(a)+f(b)\right) + \int_a^b f(t)\,dt$

d'où $I = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)\,dt$

2- Mq $\int_a^b \frac{(t-a)(b-t)}{2}\,dt = \frac{(b-a)^3}{12}$

ona $\int_a^b \frac{(t-a)(b-t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_a^b \left(-t^2+(a+b)t-ab\right)dt$

$= \frac{1}{2}\left[-\frac{t^3}{3} + (a+b)\frac{t^2}{2} - abt\right]_a^b$

$= \frac{1}{2}\left[-\frac{b^3-a^3}{3} + (a+b)\frac{b^2-a^2}{2} - ab(b-a)\right]$

$= -\frac{b-a}{2}\left[\frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{2} + ab\right]$

$= \frac{(b-a)}{2}\left[\frac{2b^2+2ab+2a^2-3a^2-6ab-3b^2+6ab}{6}\right]$

$= \frac{-(b-a)}{2}\,\frac{-b^2+2ab-a^2}{6}$

$= \frac{(b-a)^3}{12}$

3- enfixe $n \geqslant 1$ et on pose $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$

on note I_n la valeur approchée de I obtenue par la méthode des trapèzes avec n intervalles.

3 a) l'aire sem... (a_{k+1} est

ona

b)

$I =$

Puis

$I =$

$\sum_{k=0}^{n-1}$

$|I - I$

$\sum_{k=0}^{n-1}$

$=$

3 a) Exprimer I_n en fct de a_k.
l'aire du trapèze (rectangle) dont les sommets sont $(a_k,0)$, $(a_k, f(a_k))$, $(a_{k+1}, f(a_{k+1}))$, $(a_{k+1}, 0)$
est $(a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}$

on a donc $I_n = \sum_{k=0}^{n+1} (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}$

b) Démontrer que $|I - I_N| \leq \frac{M_2(b-a)}{12n^2}$

$I = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt$

Puis on applique la 1ère question

$I = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt$

$= \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{(t-a_k)(t-a_{k+1})}{2} f''(t)\,dt$

$|I - I_N| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{(t-a_k)(t-a_{k+1})}{2} f''(t)\,dt - \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1}-a_k) \times \frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} \right|$

$= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{(t-a_k)(t-a_{k+1})}{2} f''(t)\,dt \right|$

$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left| \frac{(t-a_k)(t-a_{k+1})}{2} f''(t) \right| dt$

$\leq M_2 \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{(t-a_k)(a_{k+1}-t)}{2}\,dt$

$\leq M_2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(a_{k+1}-a_k)^3}{12}$

$\leq M_2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n} - a - k\frac{b-a}{n}\right)^3}{12}$

$\leq M_2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^3}{12n^3}$

$\leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}$

Exercice 14

$\forall n \geq 0$, on définit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$

1. Démontrer que la suite (I_n) tend vers 0

$\forall x \in [0,1]$ on a $0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$

En intégrant cette inégalité entre 0 et 1 on trouve $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right] = \frac{1}{n+1} \to 0$

2. Pour $n \geq 0$ calculer $I_n + I_{n+1}$

$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}\,dx$

$= \frac{1}{n+1}$.

3. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$

on a $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \mp \frac{1}{n}$

$= (I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + \cdots \mp (I_{n-1} + I_n)$

$= I_0 \mp I_n \xrightarrow[+\infty]{} I_0$

car $\lim I_n = 0$

et $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \left[\ln|1+x|\right]_0^1 = \ln(2)$

donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$

Exercice 15

Calculer la limite de la suite (U_n) dans les cas suivants

1. $U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx$

on a $\forall x \in [0,1]$ on a $0 \leq \ln(1+x) \leq \ln(2)$

on a $x^n \geq 0$ donc $0 \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx \leq \int_0^1 x^n \ln 2\,dx = \frac{\ln 2}{n+1} \to 0$

donc d'après Gendarme $U_n \to 0$

2. $U_n = \int_0^n \frac{1}{1+e^{nt}}\,dt$

on a $\forall t \in [0,n]$ on a $0 \leq \frac{1}{1+e^{nt}} \leq \frac{1}{e^{nt}} = e^{-nt}$

donc $0 \leq \int_0^n \frac{1}{1+e^{nt}}\,dt \leq \int_0^n e^{-nt}\,dt = \left[\frac{-e^{-nt}}{n}\right]_0^n$

donc $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left[1 - e^{-n^2}\right] \leq \frac{1}{n}$

donc d'après gendarme $U_n \to 0$

Exercice 16

Déterminer une primitive des fcts suivantes.

1 - $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$

Comme $\frac{1}{\sin(-x)}(-dx) = \frac{1}{-\sin x}(-dx) = \frac{dx}{\sin x}$

La règle de bioche nous indique le changement de variable $U = \cos x$

donc $dU = -\sin x\,dx$

donc $\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int -\frac{1}{\sin^2 x}(-\sin x)\,dx$

$= \int \frac{-1}{1-\cos^2(x)}(-\sin x)\,dx = \int \frac{-1}{1-U^2}\,dU$

$= -\int \frac{1\,dU}{(1+U)(1-U)} = \int \frac{-a}{1-U}\,dU - \int \frac{b}{1+U}$

on a $(1-U)F(U) = a + \frac{1-U}{1+U} = \frac{1}{1+U}$

$U \to 1 \quad a+0 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

et $(1+U)F(U) = \frac{1+U}{1-U}a + b = \frac{1}{1-U}$

$U \to -1 \quad 0+b = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

donc $\int \frac{1}{\sin x}\,dx = -\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-U} + \frac{1}{1+U}\right)dU$

$= -\frac{1}{2}\ln|1-U| - \frac{1}{2}\ln|1+U| + C, C\in\mathbb{R}$

$= -\frac{1}{2}\ln|1-\cos x| - \frac{1}{2}\ln|1+\cos x| + C$

2 - $\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$

on a $\frac{\sin^3(-x)}{1+\cos^2(-x)}(-dx) = \frac{(-\sin(x))^3}{1+\cos^2 x}(-dx)$

$= \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx.$

La règle de bioche nous donne

$U = \cos x \Rightarrow dU = -\sin x.$

on ~~$\sin^3(x)\,dU = -\sin^3(x)$~~

$\sin^3(x)\,dx = \sin^2 x \sin x\,dx$

$= (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$

$= -(1-U^2)\,dU$

donc $\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{1-U^2}{1+U^2}\,dU$

$= -\int\left(-1 + \frac{2}{1+U^2}\right)dU = U - 2\,\text{Arctan}\,U + C$

$= \cos x - 2\,\text{Arctan}(\cos x) + C$

3 - $\int \sin^8(x)\cos^3(x)\,dx$

on a $\sin^8(\pi-x)\cos^3(\pi-x)\,d(\pi-x)$

$= \sin^8 x\,(-1)^3\cos^3(x)\,(-dx)$

$= \sin^8(x)\cos^2(x).\,dx$

Le changement de variable est $U = \sin x \quad dU = \cos x\,dx.$

$\int \sin^8 x \cos^3 x\,dx = \int U^8(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

$= \int U^8(1-U^2)\,dU = \frac{1}{9}U^9 - \frac{1}{11}U^{11}$

$= \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{1}{11}\sin^{11} x.$

4 - $\int x\arctan x\,dx$

on pose $U' = x \Rightarrow U = \frac{x^2}{2}$

et $V = \arctan x \Rightarrow V' = \frac{1}{1+x^2}$

donc $\int \arctan(x)\,x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\arctan x\right]$

$-\int \frac{1}{x^2}\,\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C$

$= \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x - \frac{1}{2}x + C$

5) $\int \cos^{1234}(x)\sin(x)\,dx$

$p = 1234$ pair, $q = 1$ impair

donc on pose $U = \cos x$, $dU = -\sin x\,dx$

$\int \cos^{1234}(x)\sin(x)\,dx = \int U^{1234}(-dU) = -\frac{U^{1235}}{1235} + C$

$= -\frac{\cos^{1235}}{1235} + C, \quad C\in\mathbb{R}$

6) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ on pose $\begin{cases} U = \ln x \\ dU = \frac{1}{x}\,dx \end{cases}$

$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{1}{U}\,dU = \ln|U| + C$

$= \ln(\ln(x)) + C$

7) $\int \frac{1}{3+e^{-x}}\,dx$ on pose $U = e^x$

$x = \ln U$ et $dx = \frac{dU}{U}$

$\int \frac{1}{3+e^{-x}}\,dx = \int \frac{1}{3+\frac{1}{U}}\,\frac{dU}{U}$

$= \int \frac{1}{3U+1}\,dU = \frac{1}{3}\ln|3U+1| + C., C\in\mathbb{R}$

$= \frac{1}{3}\ln|3e^x + 1| + C, \quad C\in\mathbb{R}.$

8) $\int \frac{ch^3 x}{1+sh x}\,dx = \int \frac{ch^2 x}{1+sh x}\,ch x\,dx = \int \frac{1+sh^2 x}{1+sh x}\,ch x\,dx$

$U = sh x \Rightarrow dU = ch x\,dx = \int \frac{1+U^2}{1+U}\,dU = \int \frac{U^2-1+2}{1+U}\,dU = \int \left(U - 1 + \frac{2}{1+U}\right) dU$

et

$ch^2 x - sh^2 x = 1 \quad = \frac{U^2}{2} - U + 2\ln|1+U| + c = \frac{sh^2 x}{2} - sh x + 2\ln|sh x + 1| + c$

Série 2 : Intégrales généralisées

Exercice 1

Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

1- $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$

$= \lim_{x\to+\infty} [\text{Arctan } t]_0^x = \frac{\pi}{2}$

donc I converge

2- $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,dt}{(1+t^2)^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{t\,dt}{(1+t^2)^2} + \int_0^{+\infty} \frac{t\,dt}{(1+t^2)^2}$

$= \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt + \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)} dt$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{2} \left[\frac{1}{1+t^2}\right]_x^0 + \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{2} \left[\frac{1}{1+t^2}\right]_0^x$

$= \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ donc J converge

3- $K = \int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$ on pose $f(t) = t^\alpha e^{-t}$

$= t^\alpha e^{-t/2} e^{-t/2}$ or $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha . e^{-t/2} = 0$ donc $t^\alpha e^{-t/2}$ est aussi petite que l'on veut

Donc, en particulier $\exists A > 0$ tq

$\forall t > 0$ $t^\alpha e^{-t/2} \leqslant 1 \Rightarrow t^\alpha e^{-t} \leqslant e^{-t/2}$

or $\int_1^{+\infty} e^{-t/2} dt$ converge.

en effet $\int_1^{+\infty} e^{-t/2} dt = \lim_{+\infty} [-2e^{-t/2}]_1^x$

$= 2e^{-\frac{1}{2}} < +\infty$

d'après le théorème de comparaison l'intégrale K converge aussi

4- $L = \int_1^{+\infty} \frac{t^5+3t+1}{t^3+4} e^{-t} dt$

on a $\frac{t^5+3t+1}{t^3+4} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^5}{t^3} = t^2$

donc $\frac{t^5+3t+1}{t^3+4} e^{-t} \underset{+\infty}{\sim} t^2 e^{-t}$

et d'après l'intégrale 3) pour $\alpha = 2$

on a $\int_1^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$ converge

donc L converge

Exercice 2

Etudier par un calcul direct la nature de l'intégrale : $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$

soit $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

l'intégrale I admet 2 singularités en 1 et $+\infty$.

Pour cela, on écrit pour $a > 1$.

$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-1} + \int_1^a \frac{dx}{x^2-1} + \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$

$\Rightarrow I = I_0 + I_1 + I_2$

on a $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$

or $\lim_{x\to1} (x-1) f(x) = a = \frac{1}{2}$

et $\lim_{x\to-1} (x+1) f(x) = b = \frac{-1}{2}$

Donc $f(x) = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{-1}{2(x+1)}$

Une primitive de f est donnée par :

$F(x) = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1|$

$= \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

On $I_0 = \lim_{x\to1} (F(x) - F(0))$

$= \lim_{x\to1} \left(\frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| - 0\right)$

$= -\infty$.

donc I_0 diverge donc I diverge

Exercice 3

Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

a) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx$

la fct $f : x \to \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{x}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$ donc localement intégrable

donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx$

$= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(x) dx$

Au voisinage de 0

$f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$

or $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx$ est une intégrale de Riemann qui converge car $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

Donc $\int_0^1 f(x)$ converge aussi.

Au voisinage de $+\infty$

on a $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} - 1\right)}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{6}}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right)$

$= x^{-\frac{1}{6}}\left(1 + \frac{1}{3x} + \theta\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right)$

$f(x) = \frac{1}{3x^{7/6}} + \theta\left(\frac{1}{x^{7/6}}\right)$.

$\Longrightarrow f(x) \underset{+\infty}{\simeq} \frac{1}{3x^{7/6}}$ or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{3x^{7/6}} dx$ converge

car $\frac{7}{6} > 1$ donc $\int_0^{+\infty} f(x)$ converge

b) $\int_0^1 \frac{\log(x)}{x-1} dx$

la fct $f : x \longrightarrow \frac{\log(x)}{x-1}$ n'est pas défini en 0 et 1.

Donc $\exists c \in]0,1[$ tq :

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^c f(x)dx + \int_c^1 f(x)dx$

Au voisinage de 0

$f(x) \underset{0^+}{\sim} -\log(x)$

Donc $\int_0^c -\lg(x)dx = \lim_{x \to 0^+} \int_x^c -\log(x)dx$

$= \lim_{x \to 0^+} [x\lg(x)]_x^c - \int_x^c x \frac{1}{x\ln(10)} dx$

donc $\int_0^c -\log(x)dx = c\left(\frac{1}{\ln(10)} - \log(c)\right) < +\infty$

Donc $\int_0^c f(x)dx$ converge.

Au voisinage de 1

$\frac{\log x}{x-1} = \frac{\log(x) - \log(1)}{x-1} \underset{1^-}{\sim} (\log(x))'_{x=1} = 1$

or $\int_c^1 dx = 1 - c < +\infty$

donc $\int_c^1 f(x)dx$ converge

donc $\int_0^1 f(x)dx$ converge

c) $\int_2^{+\infty} \sqrt{x^2+3x}\, \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) \sin^2\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) dx$

on a la fct $f : x \mapsto \sqrt{x^2+3x}\, \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) \times \sin^2\left(\frac{1}{\ln x}\right) dx$ continue sur $[2, +\infty[$

alors elle est localement intégrable

. Au voisinage de $+\infty$

on a $\sqrt{x^2+3x} = x\sqrt{1+\frac{3}{x}} \underset{+\infty}{\sim} x$.

et $\cos\frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} 1 - \frac{1}{2x^2}$

et $\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) \simeq \ln\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{2x^2}$

et $\sin^2\left(\frac{1}{\ln x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\ln x)^2}$

alors $f(x) \sim x \cdot \frac{-1}{2x^2} \cdot \frac{1}{(\ln x)^2} = \frac{-1}{2x(\ln x)^2}$

Intégrale de Bertrand $\rightarrow$

et comme on a $\int_2^{+\infty} \frac{-1}{2x(\ln x)^2} dx$ converge

alors f converge sur $[2, +\infty[$

Exercice 4

1. Etudier, suivant $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la convergente de l'intégrale généralisée suivante

$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt$

on a la fct $f :]0,1[\to \mathbb{R}$

$t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$

est continue et positive sur $]0,1[$ donc localement intégrable.

. Au voisinage de 0

on a $f(t) \underset{0^+}{\sim} t^{\alpha-1}$

or $\int_0^1 t^{\alpha-1} dt$ converge ssi $1 - \alpha < 1$

$\Leftrightarrow \alpha > 0$

. Au voisinage de 1

on a $f(t) \underset{1^-}{\sim} (1-t)^{\beta-1}$

or $\int_0^1 (1-t)^{\beta-1} dt$ converge ssi $1 - \beta < 1$

$\Leftrightarrow \beta > 0$

Donc $\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-t} dt$ converge ssi $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

dx

x)

) x

[

nable

$\frac{1}{x(\ln x)^2}$

erge

2) Préciser, suivant les valeurs de p, la nature de l'intégrale suivante :

$\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{t+1}\,dt$

ona la fct $f : t \to \frac{t^{p-1}}{t+1}$ continue et positive sur $[0, +\infty[$.

- Au voisinage de 0

$f(x) \underset{0}{\sim} t^{p-1}$

alors $\int f(x)\,dx$ converge ssi $1-p<1$

$\Rightarrow -p<0 \Rightarrow p>0$

Au voisinage de $+\infty$

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^{p-1}}{t} = t^{p-2}$

donc $\int f$ converge ssi $2-p>1 \Rightarrow p<1$

alors $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge ssi

$0 < p < 1$

3) Etudier l'existence de l'intégrale en fct de α $\int_0^{+\infty} t^\alpha \left(1 - e^{-1/\sqrt{t}}\right) dt$

soit $f : t \to t^\alpha \left(1 - e^{-1/\sqrt{t}}\right)$ positive et continue sur $]0, +\infty[$

$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt + \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$

Au voisinage de 0

ona $f(t) \underset{0^+}{\sim} t^\alpha$.

or $\int_0^a t^\alpha\,dt$ converge ssi $-\alpha<1 \Rightarrow \alpha>-1$

Au voisinage de $+\infty$

ona $e^t = 1 + t + \theta(t)$

$1 - e^t = t + \theta(t)$

donc $1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}} = \frac{1}{\sqrt{t}} + \theta(t) \Rightarrow t^\alpha\left(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}}\right) \underset{+\infty}{\sim} t^{\alpha-\frac{1}{2}}$

Donc $\int_a^{+\infty} t^{\alpha-\frac{1}{2}}\,dt$ converge ssi $-\alpha+\frac{1}{2}>1$

$\Rightarrow \alpha < \frac{-1}{2}$

- donc $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge ssi $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$

4) Etudier, selon α et β, la convergence de l'intégrale suivante $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\,dt$

$f : t \to \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$

étudions l'intégrabilité de $+\infty$.

1er cas : $\alpha > 1$

$t^{\frac{\alpha+1}{2}} f(t) = \frac{1}{t^{\frac{\alpha-1}{2}} (\ln t)^\beta} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ car $\frac{\alpha-1}{2}>0$

donc $f(t) = \theta\left(\frac{1}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)$

et comme $\frac{\alpha+1}{2}>1$, la fct $t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ CV

Donc $\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$ CV.

2ème cas $\alpha < 1$

$t^{\frac{\alpha+1}{2}} f(t) = \frac{t^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(\ln t)^\beta} \to +\infty \quad \left(\frac{1-\alpha}{2}>0\right)$

donc $\frac{1}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ est négligeable devant $f(t)$ en $+\infty$

et comme $\frac{\alpha+1}{2}<1$, la fct $t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ D.V

Donc $\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge

3ème cas $\alpha = 1$

Pour $T>2$ on pose $U = \ln t \Rightarrow dU = \frac{dt}{t}$

$\int_2^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{T\to+\infty} \int_2^T \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,dt.$

$= \lim_{T\to+\infty} \int_{\ln 2}^{\ln T} \frac{1}{U^\beta}\,dU$

or $\int_{\ln 2}^{\ln t} \frac{1}{U^\beta}\,dU$ converge ssi $\beta>1$

car $\ln T \to +\infty$.

Donc $\int_c^{+\infty} f(t)\,dt$ converge ssi $\begin{cases} \alpha>1 \\ \text{ou} \\ \alpha=1 \text{ et } \beta>1 \end{cases}$

Exercice 5

Préciser la nature des intégrales généralisées suivantes :

1) $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$

ona $\frac{1}{x(1+x^2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$

ona $\frac{1}{x^3}$ CV car $\alpha = 3 > 1$

d'où $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$ CV

2) $J = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2}\,dx$

on a $f(x) = \frac{\arctan(x)}{x^2}$ $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

f est définie et C^∞ sur $]0,+\infty[$ donc

Pocalement intégrable

$J = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$

$= J_1 + J_2$

Sur $]0,1[$ $f(x) > 0$

et au voisinage de 0

$f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ (car $\arctan x = x + \theta(x)$

On $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ est un intégrale de Riemann qui diverge donc J diverge aussi.

Exercice 6

Vérifier la convergence, puis calculer

a) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{1\,dx}{1+x^2}$

. sur $]-\infty,0]$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue et positive sur $]-\infty,0]$ alors Pocalement intégrable.

or $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{x\to-\infty} -\arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

donc $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ converge.

. sur $[0,+\infty[$ on a $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$

or $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ CV

donc I CV et $I = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

b) $J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^4)^2}\,dx$

on a $x \mapsto \frac{1}{(1+x^4)^2}$ est continue et positive

donc Pocalement intégrable

au $V(+\infty)$: $\frac{1}{(1+x^4)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^6}$ CV (car $\alpha = 6 > 1$)

soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^4)^2}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{(1+x^4)^2}\,dx$

$\begin{cases} u(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{-2x}{(1+x^4)^2} \\ v(x) = x \end{cases}$

$I = \left[\frac{x}{1+x^2}\right]_0^x - \int_0^x \frac{-2x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$

$= \left[\frac{x}{1+x^2}\right]_0^x + 2\int_0^x \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$

$= \left[\frac{x}{1+x^2}\right]_0^x + 2\int_0^x \left(\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}\right)dx$

$= \left[\frac{x}{1+x^2}\right]_0^x + 2\left[\text{Arctang}(x)\right]_0^x - 2J$

Donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$

et $I = 2\cdot\frac{\pi}{2} - 2\cdot J$

$I = \pi - 2J \Rightarrow J = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$

Exercice 7

soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

1 - Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}$, I_n existe-t-il ?

Il y a un problème en 0 et 1.

au $V(0)$ $\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \underset{0^+}{\sim} x^n$ CV $-n < 1$

$\Rightarrow n > -1 \Rightarrow n \geq 0$

au $V(1)$ $\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \underset{1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ CV en 1.

d'où I_n CV pour $n \geq 0$

2 - Etablir une relation de récurrence entre les I_n

$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{x\,x^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

on pose $\begin{cases} U' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ U = x^{n-1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U = -\sqrt{1-x^2} \\ U' = (n-1)x^{n-2} \end{cases}$

Donc $I_n = \left[-\sqrt{1-x^2}\,x^{n-1}\right]_0^1 + (n-1)\times$

$\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\,dx = (n-1)\int_0^1 \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,x^{n-2}\,dx$

$= (n-1)\left[\underbrace{\int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{I_{n-2}} - \underbrace{\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{I_n}\right]$

d'où $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

3_ Calculer I_n

Pour n paire : $n = 2k$

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2}$$
$$= \frac{(2k-1)(2k-3)}{2k(2k-2)} I_{2k-4}$$
$$= \frac{(2k-1)(2k-3)(2k-5)\dots\times 1}{2k(2k-2)(2k-4)\dots 2} I_0$$

on a $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\arccos(x)\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$

Donc $I_{2k} = \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$

Pour n impaire : $n = 2k+1$

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \frac{2k(2k-2)}{(2k+1)(2k-1)} I_{2k-3}$$
$$= \frac{2k(2k-2)(2k-4)\times\dots\times 2}{(2k+1)(2k-1)(2k-3)\times\dots\times 3} I_1$$

on $I_n = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[-\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = 1$

d'où $I_{2k+1} = \frac{(2^k k!)^2}{(2k+1)!}$

Exercice 8

1_ Ma la fct $x \to |\log(x)|^p$ est intégrable sur $]0,1]$

on a $\forall \alpha > 0$, $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha |\log(x)|^p = 0$

Pour $\varepsilon = 1$, $\exists \eta > 0$, $0 < x < \eta \Rightarrow |x^\alpha \log^p(x)| < 1$

Donc $|\log^p(x)| < \frac{1}{x^\alpha}$ au voisinage de 0

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ on a $\int_0^\eta \frac{1}{x^{1/2}} dx$ CV

Donc $\int_0^\eta |\log^p(x)| dx$ converge

d'où I_p est absolument convergente donc convergente.

2_ Calculer $I_p = \int_0^1 (\log(x))^p dx$ en faisant le changement de variable $t = \log(x)$

on pose $t = \log(x) \Rightarrow x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$

$$I_p = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\log(\varepsilon)}^0 t^p e^t dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} J_\varepsilon$$

on pose $\begin{cases} u' = e^t \\ v = t^p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = e^t \\ v' = p t^{p-1} \end{cases}$

Donc $J_\varepsilon = \left[t^p e^t\right]_{\log(\varepsilon)}^0 - \int_{\log(\varepsilon)}^0 t^{p-1} e^t dt$.

d'où $I_p = \lim_{\varepsilon\to 0^+} J_\varepsilon = -p I_{p-1}$

Par récurrence $I_p = -p(-(p-1)) I_{p-2}$
$$= -p(-(p-1))(-(p-2)) I_{p-3}$$
$$= (-1)^{p-1} p! I_1$$

$I_1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \log(x) dx$.

on pose $u' = 1 \Rightarrow u = x$

$v = \log(x) \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \int_\varepsilon^1 \log(x) dx = \left[x\log(x)\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 x \cdot \frac{1}{x} dx$$
$$= \varepsilon \log(\varepsilon) - (1-\varepsilon)$$

d'où $I_1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \log(x) dx = -1$

Donc $I_p = (-1)^p p!$

Exercice 9

Soit $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$

1_ Etudier la nature de $\Gamma(\alpha)$ selon la valeur du paramètre α.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

Au $\nu(0)$ $e^{-t} \sim 1 \Rightarrow e^{-t} t^{\alpha-1} \sim t^{\alpha-1}$

$\int_0^1 t^{\alpha-1} dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{1-\alpha}} dt$ converge ssi

$1-\alpha < 1 \Rightarrow \alpha > 0$

Donc $\int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Au $\nu(+\infty)$ $\lim_{t\to+\infty} t^n t^{\alpha-1} e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} t^{n+\alpha-1} e^{-t} = 0$

Pour $n = 2$ $\lim_{t\to+\infty} t^2 (t^{\alpha-1} e^{-t}) = 0 \quad \forall \alpha$

$\nu(+\infty)$ $0 \le t^{\alpha-1} e^{-t} \le \frac{1}{t^2}$

Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (car $\alpha = 2 > 1$)

Donc $\int_1^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ converge $\forall \alpha$

d'où $\Gamma(\alpha)$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 0$

2- Déterminer $\Gamma(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$

$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{n-1} dt$.

$u' = e^{-t} \Rightarrow u = -e^{-t}$

$v = t^{n-1} \Rightarrow v' = (n-1) t^{n-2}$

et $\Gamma(n) = \lim_{x \to +\infty} \left\{ \left[-t^{n-1} e^{-t} \right]_0^x + \int_0^x (n-1) t^{n-2} e^{-t} dt \right\}$

$= \lim_{x \to +\infty} \left\{ -x^{n-1} e^{-x} + (n-1) \int_0^x t^{n-2} e^{-t} dt \right\}$

$= (n-1) \int_0^{+\infty} t^{n-2} e^{-t} dt = (n-1) \Gamma(n-1)$

$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-1)} = n-1$

$\Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)! \Gamma(1)$

$\vdots$

$\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)} = 1$

or $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{x \to +\infty} \left[-e^{-t} \right]_0^x = 1$

d'où $\Gamma(n) = (n-1)!$

Exercice 10

Soient $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$ et $J_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha} dx$

1- Etudier la nature de I_α et J_α suivant la valeur du paramètre α.

$\rightarrow I_\alpha = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$

Au $V(0)$ $\sin(x) \underset{0}{\sim} x \Rightarrow \frac{\sin x}{x^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$

$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha - 1 < 1 \Rightarrow \alpha < 2$

Au $V(+\infty)$ $\left| \frac{\sin(x)}{x^\alpha} \right| \leqslant \frac{1}{x^\alpha}$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x^\alpha} \right| dx$ converge pour $\alpha > 1$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

$+ \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx = \lim_{x \to +\infty} \left[-\cos(x) x^{-\alpha} \right]_1^x - \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}} dx$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-\cos(x)}{x^\alpha} + \cos(1) - \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}} dx$

$= \cos(1) - \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}} dx$

$\left| \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}} \right| \leqslant \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}} dx$ CV

$\Leftrightarrow \alpha + 1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 0$

si $\alpha = 0$ $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^0} dx = \int_1^{+\infty} \sin(x) dx$

$= \lim_{x \to +\infty} \int_1^x \sin(x) dx = \lim_{x \to +\infty} \left[-\cos(x) + \cos(1) \right]$

La limite n'existe pas.

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^0} dx$ diverge

si $\alpha < 0$ on applique critère de Cauchy

Pour $x = 2k\pi$ $\quad y = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$.

$\int_x^y \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx = \int_{2k\pi}^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$

$\geqslant \frac{1}{(2k\pi)^\alpha} \int_{2k\pi}^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \sin(x) dx$

$\geqslant \frac{1}{(2k\pi)^\alpha} \left[-\cos(x) \right]_{2k\pi}^{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$

$\geqslant \frac{1}{(2k\pi)^\alpha} \geqslant \frac{1}{(2\pi i)^\alpha} = \varepsilon$

Donc si $\alpha < 0$ $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$ diverge.

D'où $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$ CV $\Leftrightarrow 0 < \alpha < 2$.

$\rightarrow J_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{\cos(x)}{x^\alpha} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha} dx$

Au $V(0)$ $\cos(x) \underset{0}{\sim} 1 \Rightarrow \frac{\cos(x)}{x^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^\alpha}$

$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ CV $\Leftrightarrow \alpha < 1$

Au $V(+\infty)$ $\left| \frac{\cos(x)}{x^\alpha} \right| \leqslant \frac{1}{x^\alpha}$

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha} dx = \lim_{x \to +\infty} \left[\sin(x) x^{-\alpha} \right]_1^x$

$+ \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\alpha+1}} dx = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}}_{=0} - \sin(1)$

$+ \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\alpha+1}} dx$.

$= -\sin(1) + \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\alpha+1}} dx$

$\left| \frac{\sin(x)}{x^{\alpha+1}} \right| \leqslant \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}}$ CV $\Leftrightarrow \alpha + 1 > 1$

$\Leftrightarrow \alpha > 0$

d'où $J_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha} dx$ CV $\Leftrightarrow 0 < \alpha < 1$

2) $\int_0^{+\infty} \cos(e^x)\,dx$ et $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$

En déduire ses natures.

1) • on pose $t = e^x \Rightarrow dt = e^x\,dx$

$\int_0^{+\infty} \cos(e^x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,dt$

Pour $\alpha = 1 > 0 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,dt$ CV

d'où $\int_0^{+\infty} \cos(e^x)\,dx$ CV.

• on pose $u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$

Donc $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,du$

$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2u^{1/2}}\,du$

On $0 < \alpha = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ CV

3- Même question pour $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+1}\,dx$

$\frac{x\sin(x)}{x^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x\sin(x)}{x^2} = \frac{\sin(x)}{x}$

et $\frac{x\sin(x)}{x^2+1} = \frac{\sin(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}$

Au $V(+\infty)$ $\left|\frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}\right| \leqslant \frac{1}{x(x^2+1)} \leqslant \frac{1}{x^3}$

$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}\right| dx$ CV $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}\,dx$ CV

Au $V(0)$ $\frac{\sin(x)}{x(x^2+1)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^2+1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^2}$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ CV $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}\,dx$ CV

De plus $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}$ CV (car $\alpha = 1$ et $0 < \alpha = 1 < 2$)

d'où $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+1}\,dx$ CV